LES MATHÉMATIQUES À LA MAISON

BAND 2

ROBERT UND MICHEL LYONS

(Oktober 2000)

Einleitung

Eine Neubetrachtung

Für die meisten Menschen besteht Unterricht in erster Linie darin, geduldig zu erklären, anschließend Übungen zur Vertiefung in ausreichender, aber nicht übermäßiger Menge anzubieten und schließlich den Lernfortschritt zu bewerten. Aus dieser Perspektive vermittelt der Lehrer dem Schüler sein Verständnis, sein Wissen und seine Fähigkeiten. Im Gegenzug versucht der Schüler, die Kompetenzen des Lehrers so gut wie möglich nachzuahmen.

Leider führt diese Sichtweise und Praxis des Unterrichtens zu Ergebnissen, die deutlich hinter den tatsächlichen Möglichkeiten der Schüler zurückbleiben. Tatsächlich ermöglicht der oben beschriebene Unterrichtsprozess es dem Lehrer nur selten, die Denkweise des Schülers zu verstehen und ihm somit so effektiv wie möglich zu helfen.

Man muss sich bewusst sein, dass sich die Lernweisen von Mensch zu Mensch unterscheiden. Man muss sich bewusst sein, dass sich die Denkweisen von Mensch zu Mensch unterscheiden. Man muss sich bewusst sein, dass sich die Lerntempi von Mensch zu Mensch unterscheiden.

Nehmen wir ein Beispiel. Stellen wir uns eine Gruppe von Schülern im Alter von etwa zwölf Jahren vor. In diesem Alter haben sie gelernt, Brüche zu addieren, zu subtrahieren und zu multiplizieren. Nehmen wir an, sie sind bereit, sich mit der Division von Brüchen zu befassen. Sie sind der Lehrer und müssen sie daher bei diesem neuen Lernschritt anleiten. Als erstes Beispiel schlagen Sie folgende Division vor:

$$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} =$$

„Zu schwierig!“, denken Sie? Das muss nicht unbedingt so sein, aber falls Sie darauf bestehen, hier ein weiterer Vorschlag:

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} =$$

Erleichtert? Gut! Was machen Sie nun? Nehmen Sie sich Zeit zum Nachdenken, wählen Sie die erste oder die zweite Division aus und versuchen Sie sich vorzustellen, was Sie den Schülern sagen werden.

Denken Sie mindestens eine Minute darüber nach (das ist wichtig!), bevor Sie die beiden oben genannten Divisionen schriftlich durchführen und dabei alle Ihre Rechenschritte notieren.

Die Denkweise eines zwölfjährigen Schülers unterscheidet sich nicht wesentlich von der eines Erwachsenen, und doch zeigt er beim Erlernen neuer Inhalte oft überraschende Verhaltensweisen. Das Problem ist: Wenn der Lehrer nach dem oben beschriebenen traditionellen Modell vorgeht, hat er kaum eine Chance, die Denkweise und die Strategien des Schülers zu erkennen und zu verstehen.

Kommen wir zurück zu den Bruchdivisionen und zu Ihrer Art, diese zu unterrichten, die zweifellos derjenigen ähnelt, die von Ihren eigenen Lehrern angewendet wurde. Das ist normal, wie wir gesehen haben: Im traditionellen Unterricht ahmt der Schüler den Lehrer nach.

Sie haben sich also wahrscheinlich überlegt, wie Sie dem Schüler erklären können, dass man zum Dividieren eines Bruchs durch einen anderen den zweiten Bruch einfach umkehren muss, bevor man ihn mit dem ersten multipliziert.

En conséquence :	$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} =$	
devient	$\frac{9}{20} \times \frac{4}{3} =$	(inversion et multiplication)
puis	$\frac{3}{5} \times \frac{1}{1} =$	(après simplification)
et enfin	$\frac{3}{5}$	(car 3 x 1 = 3 et 5 x 1 = 5)

Interessant! Ein bisschen langwierig, ziemlich kompliziert und sehr überraschend für einen Zwölfjährigen, der zum ersten Mal vor einer Division steht und diese durch eine Multiplikation ersetzen muss, ohne dabei die Umkehrung des zweiten Bruchs zu vergessen.

Versuchen wir es einmal anders. Lassen wir die Erklärungen beiseite, versuchen wir nicht, für den Schüler zu denken, sondern stellen wir ihm das Problem vor, ohne ihm etwas anderes mitzugeben als das, was er bereits über Rechenoperationen und Brüche weiß. Mehr noch: Tauschen wir die Rollen und bitten wir ihn, uns zu erklären, wie seiner Meinung nach die vorangegangenen Divisionen durchgeführt werden sollten.

Das ist eine Übung, die wir schon mehrfach durchgeführt haben, um festzustellen, dass die Schüler schnell und vor allem ohne unsere Hilfe gerechnet haben:

$$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \qquad (\text{car } 9 \div 3 = 3 \text{ et } 20 \div 4 = 5)$$

und

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{1} = 3 \qquad (\text{car } 6 \div 2 = 3 \text{ et } 7 \div 7 = 1)$$

Haben Sie daran gedacht? Wenn ja, haben Sie nicht so reagiert wie die überwiegende Mehrheit der Erwachsenen angesichts dieser Divisionen. Wenn nicht, denken Sie wirklich nicht wie ein Zwölfjähriger. Übrigens ist es für Sie kein Grund zur Sorge, wenn Sie sich in der einen oder anderen der oben genannten Kategorien wiederfinden …

Nun, Sie hatten wahrscheinlich Zeit, sich einige Einwände gegen diese von den Zwölfjährigen erdachte Technik zu überlegen, auch wenn sie in den vorgeschlagenen Fällen funktioniert. Sie denken an andere Fälle.

Prenons $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} =$

Das sind genau die Arten von Divisionen, die wir den Schülern vorschlagen, die zunächst wie oben beschrieben geteilt haben, also direkt, ohne Umkehrung oder Multiplikation.

Im Wesentlichen reagieren sie auf zwei verschiedene Arten. Einige schlagen vor, diese Brüche auf denselben Nenner zu bringen, so wie sie es beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen getan haben. Sie erhalten:

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12} \div \frac{9}{12}$$

Normalerweise dividieren sie die Nenner (12 ÷ 12 = 1), wissen aber nicht, wie sie mit den Zählern umgehen sollen (8 ÷ 9 = ?). Sie müssen ihnen lediglich zeigen, wie man das schreibt:

$$\frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = \frac{8/9}{1}$$

et $\frac{8/9}{1} = \frac{8}{9}$ (car diviser par 1 ne change rien)

Andere Schüler ziehen es vor, den ersten Bruch (2/3) so umzuformen, dass jeder seiner Teile durch seinen entsprechenden Teil im Bruch 3/4 geteilt wird. Sie schlagen vor:

de changer d'abord $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$

en $\frac{6}{9} \div \frac{3}{4}$ (car $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$)

et ensuite en $\frac{24}{36} \div \frac{3}{4}$ (car $\frac{6}{9} = \frac{24}{36}$)

ils divisent et obtiennent $\frac{24}{36} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ (car $24 \div 3 = 8$ et $36 \div 4 = 9$)

Dieses Verfahren ist zeitaufwändiger als die „Kulbute“-Technik, zeigt jedoch:

1. dass die Schüler selbstständig eigene Rechenmethoden entwickeln können;
2. dass die von den Schülern erfundenen Techniken dem Lehrenden möglicherweise unbekannt sind;
3. dass sich das Denken der Schüler sehr oft von dem des Lehrers unterscheidet;
4. dass nur durch den Rollentausch (der Schüler erklärt, der Lehrer versucht zu lernen und zu verstehen) ein effektiver Unterricht möglich ist, bei dem der Schüler versteht, was er tut, weil er es selbst erfindet (Wisst ihr, warum man, anstatt durch einen Bruch zu dividieren, mit dessen Kehrwert multiplizieren muss?);
5. dass die Anzahl der durchgeführten Übungen (Wie viele Bruchdivisionen habt ihr in der Schule gemacht?) kein Verständnis fördert, sondern lediglich die Geschwindigkeit erhöht, indem sie den Schüler daran hindert, Fragen zu stellen, und ihn blind macht (Schaut euch die Bruchdivisionen an:

   $$\frac{9}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

   et

   $$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{1} = 3$$

   Wie ist es möglich, dass wir nie bemerkt haben, dass sie so einfach durchgeführt werden können?)

6. dass es, wenn der Schüler nach einigen Minuten des Nachdenkens in der Lage ist, selbst eine Rechenmethode zu entwickeln, überflüssig wird, ihm so viele Übungen zu geben, damit er sich daran erinnert.

Im folgenden Text erfahren Sie, wie Sie die ersten mathematischen Konzepte vermitteln können, die Kinder im Alter von fünf, sechs und sieben Jahren entwickeln müssen.

Zu diesem Zweck wird Ihre Arbeit dem oben Beschriebenen ähneln, was es den Schülern ermöglicht, effektive Techniken zur Division von Brüchen zu entwickeln. Übrigens – das hätten wir fast vergessen – hat uns noch nie ein Schüler vorgeschlagen, Brüche mit der traditionellen Methode zu dividieren. Nachdem die Schüler jedoch ihre eigenen Techniken entwickelt hatten, stellten wir ihnen unsere vor – die sicherlich auch Ihre ist: die „Kulbute"-Technik. Sie waren interessiert und ein wenig überrascht. Einige haben unsere Technik übernommen, andere sind bei ihrer eigenen geblieben, und wieder andere wenden je nach den gestellten Divisionsaufgaben die eine oder die andere an.

Die folgenden Kapitel zeigen Ihnen daher eine Vorgehensweise auf. Bitte versuchen Sie, sich daran zu halten. Führen Sie die Fachbegriffe und die Symbolik erst zu den angegebenen Zeitpunkten ein. Lernen ist kein Sprint, sondern ein Marathon. Und doch werden Sie feststellen, dass die Schüler sehr schnell lernen. Wenn Sie nämlich in erster Linie versuchen, ihre Denkweise zu verstehen (und genau das sollten Sie tun), laufen Sie Gefahr, schneller außer Atem zu kommen als die Schüler. Zwischen ihnen und Ihnen jedoch – darauf wetten wir –, werden Sie die Person sein, die am meisten staunt. Sie werden mit Ihren Schülern oder Ihrem Kind ein wunderbares Abenteuer erleben: das Abenteuer des Lernens.