

Kapitel 7

Addieren und Subtrahieren

Es mag überraschend erscheinen, dass das Erlernen von Addition und Subtraktion so lange hinausgezögert wurde. Tatsächlich wurden andere Konzepte wie Multiplikation, Division und sogar die Quadratwurzel bereits behandelt, die traditionell erst nach Addition und Subtraktion behandelt werden. Sie sollten sich weder über wesentliche Änderungen in der traditionellen Lernabfolge wundern, noch über das bewusste Weglassen bestimmter Pseudodefinitionen wie „Teilen heißt aufteilen“ oder „Multiplikation ist wiederholtes Addieren“. Tatsächlich sind all diese Änderungen das Ergebnis langjähriger Forschung, und Sie werden die positiven Auswirkungen davon feststellen können.

Daher können wir Ihnen nicht genug ans Herz legen, sich an den Leitfaden zu halten und es zu vermeiden, andere Aspekte der Mathematik zu behandeln, bevor die Zeit dafür gekommen ist. So sollte beispielsweise das Einlernen der Additions- oder Multiplikationstabellen nicht zu früh in Angriff genommen werden. Es handelt sich dabei nämlich um eine dieser spektakulären Lernmethoden, die eher dazu dient, das Publikum zu beeindrucken, als eine angemessene Beherrschung der Mathematik zu entwickeln.

In diesem Kapitel behandeln wir die letzten grundlegenden Konzepte der Arithmetik. Diese Konzepte werden anschließend gemeinsam genutzt, wenn wir das Positionssystem einführen. Denn bis jetzt – und das wird noch für einige Kapitel so bleiben – haben wir es systematisch vermieden, Zahlen größer als neun mithilfe des Positionssystems darzustellen. Das hat uns jedoch nicht daran gehindert, sie auf andere Weise darzustellen; so wurde die Zahl zwölf durch 3×4 symbolisiert. In diesem Kapitel kann sie durch $6 + 6$ oder durch $8 + 7 - 3$ dargestellt werden ...

Die 1489 erfundenen Symbole „+“ und „-“ dienten ursprünglich dazu, einen Gegensatz darzustellen. Während also 5 \$ oder +5 \$ ein Guthaben von fünf Dollar darstellen können, kann -5 \$ eine Schuld oder eine Ausgabe von fünf Dollar bedeuten. In der Mathematik werden immer dann, wenn ein Gegensatz dargestellt werden soll, die Zeichen „+“ und „-“ verwendet. Auf einem Thermometer ist +5 °C im Verhältnis zu 0 °C das Gegenteil von -5 °C. Die Zahlen 5^2 und 5^{-2} veranschaulichen einen Gegensatz. Denn

$5^2 = \frac{5 \times 5}{1}$ während $5^{-2} = \frac{1}{5 \times 5}$ und der Exponent Null zeigt an, dass die Gegenspieler gleich stark sind:
 $5^0 = \frac{5 \times 5}{5 \times 5} = 1.$ $\frac{5 \times 5}{5 \times 5}$

In einem anderen Zusammenhang steht „Ja“ im Gegensatz zu „Nein“, die Bejahung im Gegensatz zur Verneinung. So zeigen die vor einer Klammer stehenden Vorzeichen „+“ und „-“ an, dass die in der Klammer stehenden Vorzeichen „+“ und „-“ beibehalten werden müssen, wenn die Klammer auf das Vorzeichen „+“ folgt, oder umgekehrt werden müssen, wenn die Klammer auf das Vorzeichen „-“ folgt. Beispiele: $+(+5)$ oder $(+5)$ bedeutet, dass das „+“-Zeichen innerhalb der Klammer beibehalten werden muss. Also gilt $+(+5) = (+5)$. Ebenso gilt $+(-2) = (-2)$. Ein „-“ vor einer Klammer wirkt jedoch wie eine Negation; es bedeutet, dass ein Fehler vorliegt und dass die Vorzeichen „+“ und „-“ innerhalb der Klammer alle in ihr Gegenteil umgewandelt werden müssen. Also $-(+2) = (-2)$ und $-(-3) = (+3)$. Auf diese Weise lässt sich in der Mathematik ein bekanntes Gesetz ausdrücken: Zwei Verneinungen entsprechen einer Bejahung (Es ist falsch, dass er unhöflich ist, also ist er höflich.).

In diesem Kapitel werden den Schülern daher die Vorzeichen „+“ und „-“ vorgestellt, um einen Gegensatz auszudrücken. Tatsächlich können die mathematischen Ausdrücke, die behandelt werden, aber genauso gut Additionen und Subtraktionen veranschaulichen. Das ist die Bedeutung des Wortes „Algebra“, das so viel bedeutet wie „alles hängt zusammen“. Die Zahlen und die Symbole +, -, x, ÷ ... sind algebraische Symbole und können daher für viele Zwecke verwendet werden. Der Ausdruck $5 - 2 = 3$ kann bedeuten, dass zwischen dem Alter einer fünfjährigen Person und dem einer zweijährigen Person ein Unterschied von drei Jahren besteht, oder auch, dass man, wenn man ein fünf Meter langes Rohr um zwei Meter kürzt, ein drei Meter langes Rohr erhält...

Profil

Verständnis: Der Schüler ist in der Lage, die Angaben in den Aufgaben richtig zu interpretieren, d. h. in diesem Kapitel die Elemente der Aufgabe in zwei Gruppen einzuteilen, um festzustellen, welche Gruppe mehr Elemente enthält. Außerdem interpretiert er numerische Ausdrücke, in denen die Symbole „+“ und „-“ vorkommen.

Logisches Denken: Der Schüler arbeitet systematisch, d. h. er berücksichtigt jede Angabe der Aufgaben, ordnet sein Material übersichtlich und zieht die richtigen Schlussfolgerungen.

Effizienz: Der Schüler wird die Mengen korrekt zählen. Er wird die Bedeutung der Symbole „+“ und „-“ und wird Rechenausdrücke lesen und schreiben, in denen die Vorzeichen „+“ und „-“ vorkommen.

Material

- Etwa 50 Spielsteine;
- ein etwa 30 Zentimeter langes Stück Schnur;
- 2 Kartonstücke von 5 cm × 5 cm, das erste mit einem „+“-Zeichen und das zweite mit einem „-“.

Aufgabe 1

Teilen Sie die Arbeitsfläche des Schülers mithilfe der Schnur in zwei Bereiche auf, einen rechts und einen links von ihm.

Sagen Sie ihm, dass Sie so tun werden, als ob seine Arbeitsfläche ein riesiges Grundstück darstelle, auf dem zwei große Firmen Häuser bauen werden. Legen Sie die Spielsteine, die die Häuser darstellen, in seine Reichweite.

Sagen Sie ihm, dass im ersten Monat ein Unternehmen acht Häuser gebaut hat, während das andere sechs gebaut hat, und bitten Sie ihn, dies mit seinen Spielsteinen darzustellen.

Hinweis: Es kann vorkommen, dass der Schüler acht Spielsteine links von der Schnur und sechs rechts davon legt – oder umgekehrt –, ohne Sie zu fragen, wo die einzelnen Firmen tätig waren. Sollte dies passieren, lassen Sie ihn fertig werden und weisen Sie ihn dann darauf hin, dass er sich geirrt hat: Was rechts von der Schnur liegt, sollte links liegen und umgekehrt. Tun Sie dies unabhängig von seiner Lösung, damit er die Position der Spielsteine ändert.

Wenn der Schüler Sie zuerst fragt, wo die einzelnen Firmen gearbeitet haben, sagen Sie ihm, dass die Firma, die auf der rechten Seite gearbeitet hat, diejenige war, die acht Häuser gebaut hat.

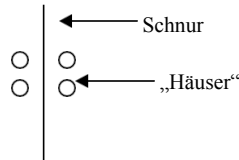
Wenn er seine Spielsteine platziert hat, fragen Sie ihn, welche Kompanie die meisten Häuser gebaut hat. Fragen Sie ihn anschließend, wie viele Häuser diese Kompanie mehr gebaut hat.

Hinweis: Diese letzte Frage führt oft zu großen Schwierigkeiten. Tatsächlich weiß der Schüler nicht, wie er den Ausdruck „mehr“ interpretieren soll. Sie müssen diesen Ausdruck daher sehr „anschaulich“ veranschaulichen, um ihm ein klares mentales Bild zu vermitteln.

Gehen Sie wie folgt vor, wenn der Schüler die letzte Frage nicht richtig und überzeugend beantworten konnte.

Markieren Sie mit je einem Spielstein beide Enden der Schnur. Sagen Sie dem Schüler: „Das sind die ersten Häuser, die von den beiden Unternehmen gebaut wurden. Ich werde sie nebeneinander entlang der Schnur aufstellen.“

Nehmen Sie zwei weitere Häuser, gehen Sie wie zuvor vor und reihen Sie diese neuen Häuser neben der Schnur und den bereits platzierten Häusern wie folgt aneinander:



Bitte Sie den Schüler, das fortzusetzen, was Sie begonnen haben.

Wenn sich auf jeder Seite der Schnur sechs Häuser befinden, zeigen Sie dem Schüler, dass auf einer Seite noch zwei übrig sind. Sagen Sie ihm: „Sieh mal, dieses Unternehmen hat tatsächlich mehr Häuser gebaut. Hier sind die beiden zusätzlichen Häuser – es hat diese beiden Häuser zusätzlich gebaut. Das andere Unternehmen hat nicht so viele Häuser gebaut, ihm fehlen zwei – es hat zwei Häuser weniger gebaut.“

Betonen Sie das Vorstehende, zögern Sie nicht, es zu wiederholen und auf unterschiedliche Weise zu

formulieren. Aufgabe 2

Hinweis: Die Darstellung dieser Aufgabe entspricht der der vorherigen Aufgabe. Lassen Sie den Schüler in jedem Fall – solange er Sie nicht fragt, bevor er seine Spielsteine legt, wo sich die Firma befindet, die eine bestimmte Anzahl an Häusern gebaut hat – seine Spielsteine legen und sagen Sie ihm am Ende, dass er sich in der Seite geirrt hat.

Sobald er Sie fragt, welches Unternehmen was gebaut hat, benennen Sie die Unternehmen und ihre Leistungen. Legen Sie dann die Karte mit dem Symbol „+“ rechts von der Schnur und die mit dem Symbol „-“ links davon ab. Sagen Sie dem Schüler, dass diese Symbole dazu dienen, die beiden Unternehmen zu kennzeichnen. Es ist ein bisschen wie eine Flagge, ein Logo oder ein Emblem, wie man es auf den Trikots von Sportlern findet.

Von diesem Moment an sagen Sie nicht mehr, dass eine Firma beispielsweise fünf Häuser gebaut hat und die andere acht, sondern dass die „Plus“-Firma fünf gebaut hat und die „Minus“-Firma acht (zum Beispiel).

Hier sind die Aufgaben, die Sie vorlegen sollen; die Symbole „+“ und „-“ beziehen sich auf die Arbeit der „Plus“-Firma und der „Minus“-Firma. Beziehen Sie sich auf den vorherigen Hinweis, um zu erfahren, wann Sie anfangen, von der „Plus“-Firma und der „Minus“-Firma zu sprechen.

- a) +6 und -9 (Also sechs Häuser rechts und neun links; die links gelegene Gruppe hat die meisten Häuser gebaut, sie hat drei mehr gebaut.)
- b) -4 und +5
- c) -7 und +7
- d) +3 und -5
- e) +4 und -0

Fügen Sie bei Bedarf weitere Fälle hinzu.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe führen Sie die Symbolisierung ein. Die Bedeutung der schriftlichen Darstellung zeigt sich in dem Moment, in dem die Möglichkeit besteht, etwas zu vergessen, und ausgehend von dieser Möglichkeit lernt der Schüler, bestimmte Daten zu notieren.

Sagen Sie dem Schüler, dass die „Minus“-Gruppe nach einem Monat drei Häuser mehr gebaut hatte als die „Plus“-Gruppe. Bitte Sie ihn, mit seinen Spielsteinen zu veranschaulichen, was jede Gruppe möglicherweise gebaut hat.

Wenn er eine Möglichkeit gefunden hat, fragen Sie ihn, ob es noch eine andere gibt.

Lassen Sie ihn eine weitere Lösung finden.

Sagen Sie ihm dann, dass Sie vergessen haben, was es zu finden galt – erinnert er sich noch daran?

Um es nicht zu vergessen, schreiben Sie „-3“ auf und erklären Sie ihm, dass dies bedeutet, dass die „Minus“-Gruppe drei Häuser mehr gebaut hat als die andere.

Hinweis: Machen Sie sich keine Gedanken darüber, dass man „-3“ notiert, um auszudrücken, dass eine Gruppe drei mehr gebaut hat. Erklären Sie einfach deutlich, dass das „-“ für die Gruppe steht und die „3“ für die Anzahl der Häuser, die diese Gruppe zusätzlich gebaut hat.

Wenn ihr +2 notiert, bedeutet das ebenfalls, dass ein Unternehmen mehr gebaut hat – diesmal ist es das „Plus“-Unternehmen –, aber das bedeutet zwangsläufig auch, dass das „Minus“-Unternehmen zwei weniger gebaut hat.

Lassen Sie den Schüler einige Lösungen finden. Wenn er die fünfte Lösung findet, fragen Sie ihn, ob diese nicht bereits gefunden wurde. Zeigen Sie sich skeptisch und weisen Sie darauf hin, dass die Lösungen auch symbolisch dargestellt werden müssten.

Aufgabe 4

Wie in der vorherigen Aufgabe, aber dieses Mal stellen Sie auch die Lösungen dar. So könnte das Ergebnis am Ende einer Aufgabe aussehen:

- 4 (Was bedeutet, dass die Gruppe der Minuszeichen 4 Häuser mehr baut.)
- 9 +5 (Das zeigt eine Möglichkeit: Die Minus-Gruppe hat 9 Häuser gebaut und die Plus-Gruppe 5.)
- 5 +1 (Das zeigt eine weitere Möglichkeit: Die Minus-Gruppe hat 5 Häuser gebaut und die Plus-Gruppe 1.)
- 4 +0 ...

usw.

Das Vorstehende zeigt, dass die „Minus“-Gruppe vier Häuser mehr gebaut hat. Die folgenden Zeilen zeigen verschiedene Möglichkeiten auf, die den Vorgaben der Aufgabe entsprechen.

Hinweis: Es spielt keine Rolle, ob die linke Spalte angibt, was die Gruppe gebaut hat, die die meisten Häuser gebaut hat. Tatsächlich solltest du diese Positionen von Aufgabe zu Aufgabe abwechseln. Innerhalb derselben Aufgabe (hier für -4) solltest du sie jedoch immer auf die gleiche Weise anordnen.

Stellen Sie dem Schüler nun einige Aufgaben vor, indem Sie jedes Mal eine Tabelle erstellen, die der oben gezeigten ähnelt. Wenn der Schüler eine Lösung wiederholt, weisen Sie ihn darauf hin, dass sie richtig ist, fügen Sie jedoch hinzu – und zeigen Sie ihm dabei, wo sie bereits vermerkt wurde –, dass sie bereits gefunden wurde.

Vorgeschlagene Aufgaben:

- a) +2
- b) -1
- c) +5
- d) +0
- e) -3
- f) -4
- g) +6
- h) -7

Fügen Sie bei Bedarf weitere Fälle hinzu.

Aufgabe 5

Zeigen Sie dem Schüler die folgenden Tabellen und erklären Sie ihm, dass die erste Zeile fehlt, in der steht, welche Mannschaft die meisten Häuser gebaut hat und wie viele Häuser mehr sie gebaut hat. Bitten Sie ihn, die fehlende Zeile zu finden und auf einem Blatt Papier zu notieren. Bitten Sie den Schüler, seine Spielsteine zu verwenden, um Ihnen seine Lösungen zu beweisen.

a)	-4 +2	b)	-6 +9	c)	+5 -8
	-6 +4		-2 +5		+4 -7
	-2 +0		-3 +6		+3 -6
	-5 +3		-1 +4		+2 -5
d)	+7 -3	e)	+0 -5	f)	-9 +8
	+5 -1		+1 -6		-5 +4
	+8 -4		+2 -7		-3 +2
	+9 -5		+3 -8		-1 +0

Aufgabe 6

Nehmen Sie die Tabellen aus Aufgabe 5 wieder zur Hand und bitten Sie den Schüler, in jeder Tabelle eine Möglichkeit zu finden, die übersehen wurde.

Aufgabe 7

Hier sind Berichte, die die Arbeit der Firmen „Plus“ und „Minus“ in drei aufeinanderfolgenden Monaten angeben. Am Ende jedes Dreimonatszeitraums soll der Schüler herausfinden und symbolisch darstellen, welche Firma die meisten Häuser gebaut hat und um wie viele mehr sie gebaut hat.

Erster Monat: -4, +6; Zweiter Monat: -5, +4; Dritter Monat: +5 und -7 (Lösung: -1)

Hinweis: Der Schüler muss die Spielsteine auf beiden Seiten der Schnur platzieren. Schreiben Sie die Angaben der Aufgabe auf ein Blatt Papier und zeigen Sie ihm dieses Blatt, während Sie die Angaben für die Aufgaben (a), (b) und (c) vor.

Ab Aufgabe (d) lassen Sie ihn selbst in Ihrem Leitfaden lesen. Auf einem weiteren Blatt notiert er die Lösung; es ist noch nicht an der Zeit, sie wie folgt aufzuschreiben: $-4 + 6 - 5 + 4 + 5 - 7 = -1$.

Der Schüler kann selbst entscheiden, mit welchen Mitteln er diese Aufgaben lösen möchte.

- b) +2, -5, -4, +6, +3, -4 (Lösung: -2)
 c) +6, -4, +5, -8, -4, +9 (Lösung: +4)
 d) -7, +5, -6, +3, -4, +0
 e) +3, -2, +0, -2, -6, +5
 f) -6, +4, -8, +9, -5, +1
 g) -3, +3, +5, -5, -6, +8
 h) +4, -5, +5, -3, +3, -4

Schlagen Sie bei Bedarf weitere Aufgaben vor. Aufgabe 8

Hier ist eine Liste von Aufgaben, mit denen das in diesem Kapitel Gelernte verallgemeinert werden kann. Die Schüler sollen jede Aufgabe veranschaulichen, indem sie Spielsteine auf die „+“- und die „-“-Seite legen, und daraus schließen, auf welcher Seite die größere Zahl liegt.

Anmerkung: Obwohl man versucht sein könnte, eine Schuld von 5 \$ mit -5 \$ und ein Vermögen von 5 \$ mit $+5$ \$ darzustellen, könnten die Symbole „+“ und „-“ jedoch auch umgekehrt verwendet werden. Aus diesem Grund spricht man von relativen ganzen Zahlen. Man sollte sich also keine Sorgen machen, wenn der Schüler sich anders entscheidet als üblicherweise vereinbart. Betrachten Sie das „+“ und das „-“ als Symbole und nicht als Darstellung von positiven und negativen Zahlen, wie sie in der Finanzwelt oder im Wetterbericht verwendet werden. Ein anderes Vorgehen wäre nicht mit den Aufgaben dieses Kapitels vereinbar und könnte beim Schüler zu Verwirrung führen.

- a) In einem Eishockeyspiel haben die Canadiens drei Tore geschossen und die Avalanche fünf. Wer hat gewonnen und mit wie vielen Toren?
- b) Bitten Sie den Schüler, diese Aufgabe zu veranschaulichen, indem er zunächst festlegt, welches Team das „Plus“-Team und welches das „Minus“-Team sein soll. Anschließend soll er seine Spielsteine entsprechend den Angaben der Aufgabe und seiner Positionskonvention anordnen. Bitten Sie ihn, die Angaben der Aufgabe (-3 , $+5$ oder -5 , $+3$ oder $+3$, -5 oder $+5$, -3) sowie den Gewinner mit der Anzahl der Tore, um die er gewonnen hat (-2 oder $+2$), aufzuschreiben. Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben genauso vor.
- c) Jacques ist acht Jahre alt und Marie ist fünf Jahre alt. Wer ist älter und um wie viele Jahre?
- d) Für ein Geschenk muss ich sechs Dollar bezahlen. Ich habe acht Dollar – reicht das aus?
- e) In einer Gruppe von Freunden gibt es vier Mädchen und drei Jungen. Welche Gruppe hat mehr Personen und um wie viele?
- f) Ein Gebäude hat acht Stockwerke und das Nachbargebäude hat fünf. Welches Gebäude ist das größere und um wie viele Stockwerke ist es höher als das andere Gebäude?
- g) In einem Korb befinden sich sechs Äpfel und sieben Pflaumen. Welche Obstsorte ist in größerer Anzahl vorhanden und um wie viel?
- h) Fünf Personen lösen lieber Rätsel, während die drei anderen Personen derselben Gruppe lieber zeichnen. Was ist das Lieblingshobby dieser Personen und wie viele Personen mehr bevorzugen dieses Hobby?
- i) In einem Haus gibt es sieben Fenster im Erdgeschoss und vier Fenster im Keller. Wo gibt es die meisten Fenster und wie viele mehr?
- j) Heute Vormittag ist ein Radfahrer neun Kilometer gefahren. Heute Nachmittag ist er sieben Kilometer gefahren. Wann ist er die meisten Kilometer gefahren und wie viele mehr?

Hinweis: Wenn der Schüler nicht weiß, was ein Kilometer ist, sagen Sie ihm, dass es die Entfernung ist, die man von Ihrem Zuhause bis zum ... Kiosk zurücklegt, vielleicht?

Erfinden Sie bei Bedarf weitere ähnliche Aufgaben. Aufgabe 9

Diesmal geht es darum, das Gegenteil von Aufgabe 8 zu lösen. Sie schreiben Symbole auf, und der Schüler erfindet eine Aufgabe und veranschaulicht sie mit seinen Spielsteinen.

- a) $+4$, -1 (Lösung: Zum Beispiel: Martin hat vier Bälle und Jacynthe hat einen. Der Schüler wird dann zu dem Schluss kommen, dass Martin drei mehr hat.)

Hinweis: Erwarten Sie nicht, dass der Schüler eine Frage formuliert, nachdem er die Aufgabenangaben genannt hat. Sechs- und Siebenjährige neigen in der Regel dazu, die Aufgabe zu veranschaulichen und zu lösen, ohne die Fragestellung in Worte zu fassen. Drängen Sie nicht darauf, dass sie eine Frage formulieren.
Ermutigen Sie den Schüler, das Thema zu wechseln, indem er von einer Aufgabe zur nächsten übergeht.

- b) -5 , $+8$
- c) $+9$, -9

d) $-4, +0$

e) $-3, +2$

f) $+6, -1$

g) $+7, -9$

h) $+8, -2$

Fügen Sie bei Bedarf weitere Aufgaben hinzu.