

Kapitel 5

Multiplizieren, dividieren, faktorisieren, Quadratwurzeln ziehen

Die Aufgaben in diesem Kapitel mögen angesichts des oben genannten Titels schwierig erscheinen. Lassen Sie sich davon nicht täuschen: Durch die Arbeit mit einfachem, konkretem Material lässt sich einer Rechenoperation wie dem Ziehen der Quadratwurzel ihre wahre Bedeutung vermitteln, die für jeden Sechsjährigen verständlich ist.

Bei den folgenden Aufgaben sollte der Schüler zunehmend folgende Verhaltensweisen zeigen:

- Verständnis: Der Schüler sollte ohne zu zögern erkennen, dass sich eine Figur durch Drehen nicht verändert. Außerdem sollte er ohne zu zögern erkennen, dass ein Quadrat, das sich in der Ecke eines Rechtecks befindet, gleichzeitig zu zwei Seiten dieses Rechtecks gehört.
- Argumentation: Der Schüler reagiert auf den kognitiven Konflikt, das heißt, er erkennt einen Widerspruch. In diesem Kapitel kann er begründen, warum ein Quadrat, das die Ecke eines Rechtecks einnimmt, zu jeder der beiden Seiten des Rechtecks gezählt werden muss, dessen Ecke es bildet.
- Effizienz: Der Schüler wird sich mit neuen Symbolen vertraut machen: $\times$, $\sqrt{\quad}$ und $\div$. Außerdem wird er weiterhin üben, Zahlen zu schreiben, zu erkennen und zu lesen.

In diesem Kapitel wird der Schüler mit dem Konzept der Multiplikation vertraut gemacht. Sie werden feststellen, dass die Gleichsetzung von Multiplikation und wiederholter Addition vollständig vermieden wurde. Dies ist wichtig und beabsichtigt. Tatsächlich können bestimmte Multiplikationen eine wiederholte Addition ersetzen, doch dies ist nicht immer der Fall. Wenn man jedoch die Multiplikation zunächst mit der wiederholten Addition in Verbindung bringt, bereitet man den Schüler auf schwierige Lerninhalte vor, wenn er unter anderem versuchen wird zu verstehen, dass $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ oder dass $a \times a = a^2$ gilt.

Indem wir Multiplikation, Division, Faktorisierung und Quadratwurzel mit einem Rechteck verknüpfen, werden wir diese Konzepte entwickeln. Die Division wird nicht mit einem Teilen oder einem Maß in Verbindung gebracht, da dies auch hier zu zahlreichen Schwierigkeiten führt, die nur wenige Erwachsene erfolgreich vermeiden können.

Tatsächlich lässt sich mit dem Rechteck jede Multiplikation und jede Division veranschaulichen. Dieses Modell wird somit für den Schüler zum bevorzugten mentalen Bild, das ihn beim Verständnis von Aufgaben leitet, die entweder Multiplikation, Division, Faktorisierung oder die Berechnung einer Quadratwurzel erfordern.

Material

30 Würfel oder quadratische Plättchen mit einer Seitenlänge von etwa 1 cm bis 2 cm.

Aufgabe 1

Fragen Sie den Schüler, was ein Rechteck ist. Bitten Sie ihn, Ihnen Gegenstände zu zeigen, an denen er ein Rechteck erkennen kann.

Besprechen Sie mit ihm, was ein Rechteck ist, und stellen Sie dabei sicher, dass Folgendes deutlich wird: Ein Rechteck

- genau vier Ecken hat;
- und dass diese vier Ecken identisch sind (wie die Ecken eines Blattes Papier). Zeigen Sie ihm nun einige Quadrate und fragen Sie ihn, ob es sich dabei um Rechtecke handelt.

Anmerkungen: 1. Alle Quadrate sind Rechtecke, da sie genau vier rechte Winkel haben. Tatsächlich handelt es sich um „verbesserte Rechtecke“, d. h. Rechtecke, die eine zusätzliche Bedingung erfüllen müssen: Sie müssen vier Seiten gleicher Länge haben.

Somit sind alle Quadrate Rechtecke, während manche Rechtecke Quadrate.

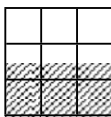
2. Erinnern Sie den Schüler bei den folgenden Aufgaben gegebenenfalls daran, was ein Quadrat und was ein Rechteck ist.

Aufgabe 2

Geben Sie dem Schüler das Material (Würfel oder quadratische Plättchen) zurück.

- Mit 9 Plättchen (oder Würfeln) können wir einen Boden in Form eines Quadrats bedecken. Baue diesen Boden.

Hinweis: Hier ist die akzeptierte Lösung:



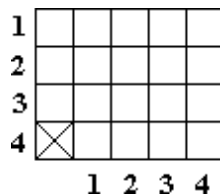
Manche Schüler begnügen sich damit, das Plättchen zu umranden, legen kein Teil in die Mitte und verwenden somit nur acht Teile. Wenn der Schüler so vorgeht, sagen Sie ihm, dass dieser Boden mit einem Loch in der Mitte sehr gefährlich ist und dass dieses Loch gefüllt werden muss.

- Man sagt, dass 9 eine Quadratzahl ist. Warum? (Mit 9 Teilen kann man ein Quadrat bilden.) Aufgabe

3

- Kannst du ein Quadrat bilden, das ein bisschen größer ist als dieses hier? (Ja, mit 16 Steinen.)
- Kannst du noch eines bilden, das noch ein bisschen größer ist? (Ja, mit 25 Steinen.)

Anmerkung: Manche Schüler bilden regelmäßig ein Rechteck wie das folgende anstelle eines Quadrats:



Wenn man sie fragt, ob alle Seiten gleich lang sind, zählen sie diese wie abgebildet und zählen das mit einem X markierte Eckquadrat nur einmal. Tatsächlich fällt es ihnen noch schwer zu verstehen, dass ein Element gleichzeitig zu zwei verschiedenen Mengen gehören kann.

Man muss einen kognitiven Konflikt (Das tut nicht weh!) wie folgt erzeugen:

- Wir werden das überprüfen. Beginne diesmal damit, die Teile oben zu zählen.

Er wird fünf finden. Zeigen Sie Ihre Verwunderung und bitten Sie ihn, die Teile auf der rechten Seite zu zählen. Es kann sein, dass er nur drei findet, wenn er seinen ursprünglichen Fehler wiederholt. Zeigen Sie sich erneut überrascht: „Wie kommt es, dass das nicht immer vier ergibt?“ Lassen Sie den Schüler über dieses Problem nachdenken.

Vermeiden Sie es, ihm zu erklären, wie er diese Schwierigkeit lösen kann. Er muss selbst darauf kommen, auch wenn er das Problem vorerst beiseite legen und in ein paar Tagen darauf zurückkommen muss. Beschränken Sie sich also darauf, das Problem, das sich beim Zählen der Kanten des Quadrats stellt, deutlich hervorzuheben.

Aufgabe 4

- ~~Wir wissen, dass die Zahlen 9, 16 und 25 Quadrate sind. Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrats aus 25 Teilen? (5 Teile)~~
- Und nun: Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrats aus 9 Teilen? (3 Teile)
- Nun, es ist etwas umständlich, jedes Mal zu wiederholen: „Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrats mit 9 oder 25 Teilen?“ Von nun an werde ich es so schreiben: $\sqrt{9}$ oder $\sqrt{25}$. Dieses Zeichen ist ein Geheimsymbol, das große Mathematiker verwenden, um zu fragen: „Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrats, das 9 oder 25 Teile hat?“

Hinweis: Möglicherweise ist dies das erste Mal, dass der Schüler eine Zahl größer als neun symbolisiert oder liest. Lesen Sie dem Schüler diese Zahl vorerst einfach vor, ohne sie zu erklären. Es ist noch zu früh, um zu begreifen, was sich hinter dem Stellenwertsystem verbirgt. Gehen Sie jedes Mal genauso vor, wenn Sie mehrstellige Zahlen im Stellenwertsystem verwenden (10, 11, 12, ...).

- Schauen wir nun mal, ob du herausfinden kannst, was die großen Mathematiker meinen, wenn sie schreiben: $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{1}$? (3, 2, 1)

Hinweis: Na los, trau dich! Nur Erwachsene haben Angst vor dem Symbol „ $\sqrt{\quad}$ “.

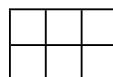
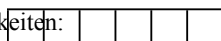
Aufgabe 5

Hier ist eine Aufgabe für die Profis: $\sqrt{6}$.

Anmerkung: Da 6 kein perfektes Quadrat ist, kann der Schüler diese Aufgabe nicht lösen. Lassen Sie ihn ein wenig suchen und Ihnen erklären, was nicht stimmt. (Man müsste 2 wegnehmen oder 3 hinzufügen, es sei denn, man schneidet die Teile zurecht.)

Sagen Sie ihm, dass es mit sechs Teilen wirklich nicht möglich ist, ein Quadrat zu bilden, aber kann man vielleicht ein Rechteck bilden?

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten:

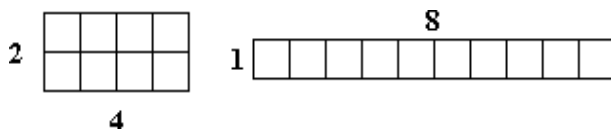


Lassen Sie den Schüler diese beiden Lösungen finden und zeichnen Sie sie auf. Weisen Sie darauf hin, dass es sich auch dann um dasselbe Rechteck handelt, wenn es gedreht ist.

Aufgabe 6

- Welche Rechtecke kannst du mit 8 Teilen bilden?

Wenn er die beiden Rechtecke gefunden hat, zeichne sie wie folgt und füge die Zahlen hinzu, die ihre Seiten angeben:



- Und nun verrate ich dir noch ein Geheimnis der großen Mathematiker. Wenn sie an das erste Rechteck denken, schreiben sie 2×4 oder 4×2 . Weißt du, was sie schreiben, wenn sie an das zweite Rechteck denken? (1×8 oder 8×1)

Hinweis: 1×8 oder 8×1 bezeichnen dasselbe Rechteck – denk daran, dass die Ausrichtung dieses Rechtecks keine Rolle spielt.

Aufgabe 7

- Schauen wir nun, ob du die Geheimnisse der großen Mathematiker kennst. Zeige die Rechtecke, an die sie denken, wenn sie schreiben:

- a) 3×2
- b) 5×1
- c) 3×3
- d) 2×4
- e) 1×6
- f) 2×2
- g) $\sqrt{9}$
- h) $\sqrt{4}$
- i) $\sqrt{1}$

Aufgabe 8

- Man kann Familien von Rechtecken bilden. So gibt es beispielsweise Rechtecke, bei denen alle Seiten drei Einheiten oder drei Teile breit sind. Finde fünf Rechtecke dieser Familie und ordne sie vom kleinsten zum größten an.

Lassen Sie den Schüler verschiedene Lösungen finden, zeichnen Sie diese auf und fragen Sie jedes Mal, ob das neue Rechteck zu der Familie derjenigen gehört, die mindestens eine Seite mit einer Länge von drei Einheiten haben.

Fragen Sie den Schüler, wie große Mathematiker jedes dieser Rechtecke symbolisieren. Ordnen Sie diese Symbole anschließend wie folgt an: 1×3 , 2×3 , 3×3 , 4×3 ... oder wie folgt: 3×1 , 3×2 , 3×3 , 3×4 ...

Fragen Sie den Schüler, ob er weiß, wie man die vorangegangenen Folgen fortsetzen kann. Bitten Sie ihn, Ihnen für jede neue Darstellung das Rechteck zu beschreiben. (z. B.: Es ist drei Kacheln lang und vier Kacheln breit.)

Aufgabe 9

- Ich kenne zwei Rechtecke, die zur selben Familie gehören. In dieser Familie haben alle Rechtecke die gleiche Breite. Man braucht zehn Teile, um das erste Rechteck zu bilden, und fünfzehn, um das zweite zu bilden. Zeige diese beiden Rechtecke und sage, zu welcher Familie sie gehören.

Hinweis: Es handelt sich um die Rechtecke 2×5 und 3×5 . Zwar könnten auch die Rechtecke 1×10 und 1×15 die Anforderungen der Aufgabe erfüllen, doch wäre dies zu einfach, da alle ganzen Zahlen zur Familie der 1 gehören.

Diese Aufgabe dient dazu, den gemeinsamen Faktor (d. h. die gemeinsame Seite) der Zahlen 10 und 15 zu finden.

Aufgabe 10

- In der Familie der Vier gibt es zwei Zahlen, die größer als zehn, aber kleiner als zwanzig sind. Kannst du die Rechtecke konstruieren, die sie darstellen? (Lösung: 3×4 und 4×4)

Aufgabe 11

- Wie lang ist ein Rechteck, das aus vierzehn Teilen besteht, wenn die Breite dieses Rechtecks zwei Teile beträgt? (Lösung: 7 Teile lang)
- Wie lang ist ein Rechteck, das aus achtzehn Teilen zusammengesetzt ist, wenn die Breite dieses Rechtecks drei Teile beträgt? (Lösung: 6 Teile lang)
- Wie lang ist ein Rechteck, das aus zwanzig Teilen zusammengesetzt ist, wenn die Breite dieses Rechtecks fünf Teile beträgt? (Lösung: 4 Teile lang)

Aufgabe 12

Hinweis: Lies dir den ersten Hinweis aus Aufgabe 4 noch einmal durch.

- Es ist an der Zeit, dass ich dir ein weiteres Geheimnis der Mathematiker verrate. Wenn sie über die drei vorherigen Aufgaben (die aus Aufgabe 11) nachdenken, schreiben sie $14/2$ oder $14 \div 2$; $18/3$ oder $18 \div 3$; $20/5$ oder $20 \div 5$ (Hinweis: Wenn du eine Division in Form eines Bruchs schreibst, ziehe den Strich horizontal).

Erinnere ihn daran die entsprechenden
, dass er die

entsprechenden und stellen Sie sicher,
die Symbolisierung.

Anmerkung: Ihnen ist sicherlich aufgefallen, dass wir es vermieden haben, die verschiedenen Rechtecke durch Gleichungen darzustellen. Wir haben $\sqrt{16}$ geschrieben und nicht $\sqrt{16} = 4$, 3×4 und nicht $3 \times 4 = 12$, $20/5$ und nicht $20/5 = 4$. Tatsächlich möchten wir nicht, dass der Schüler denkt, dass 3×4 oder $\sqrt{16}$ oder ... eine Aufgabe darstellt, die links vom Gleichheitszeichen steht, während 12, 4 oder ... die Lösung der Aufgabe darstellt und rechts davon stehen muss. Dies erspart ihm zukünftige Schwierigkeiten (in einem solchen Fall wäre $3 \times 4 = 5 + 7$) und verhindert zudem, dass der Gleichheit eine ungenaue Bedeutung zugeschrieben wird.

Aufgabe 13

- Mathematiker haben geheime Nachrichten ausgetauscht. Kannst du herausfinden, an welches Rechteck sie dachten, als sie schrieben:

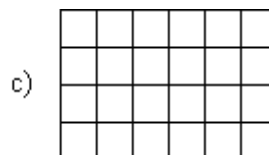
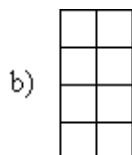
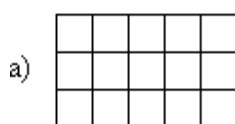
- a) 5×2
- b) $12/3$
- c) $\sqrt{9}$
- d) 3×4
- e) $10/5$
- f) $\sqrt{1}$
- g) 4×4
- h) $8 \div 2$
- i) 6×1
- j) $12 \div 6$
- k) 1×1
- l) $7 \div 7$

Aufgabe 14

Zeichnen Sie ein Quadrat mit 16 Feldern und bitten Sie den Schüler, es auf alle möglichen Arten darzustellen.
(Lösungen: $\sqrt{16}$, 4×4 , $16/4$ und $16 \div 4$.)

Aufgabe 15

Wie in Aufgabe 14, mit den folgenden Rechtecken:



Lösungen:

- a) 3×5 , 5×3 , $15/5$, $15/3$, $15 \div 5$ und $15 \div 3$;
- b) 2×4 , 4×2 , $8/2$, $8/4$, $8 \div 2$ und $8 \div 4$;
- a) 4×6 , 6×4 , $24/6$, $24/4$, $24 \div 6$ und $24 \div 4$;

Hinweis: Die vorstehenden Darstellungen beziehen sich auf das Rechteck und nicht auf die Aufgabe; sie ergeben sich erst nach der Konstruktion des Rechtecks.

Wiederholen Sie bei Bedarf von Zeit zu Zeit Aufgaben, die den Aufgaben 13 und 14 ähneln, damit die Schüler die verschiedenen in diesem Kapitel vorgestellten Darstellungen nicht vergessen.