

Kapitel 3

Mengen darstellen und vergleichen

Profil

Bevor Sie mit den Aufgaben dieses Kapitels beginnen, sollten die Schüler Folgendes bereits beherrschen. Sollte dies nicht der Fall sein, machen Sie sich keine Sorgen, sondern nutzen Sie die Aufgaben dieses Kapitels, um ihnen ein besseres Verständnis zu vermitteln.

Vermeiden Sie es, diese Leistungen formal zu bewerten, sondern beobachten Sie sie im Rahmen der Lernaktivitäten. Vermeiden Sie es außerdem unbedingt, dem Schüler das beizubringen oder zu erklären, was er noch nicht beherrscht. Denn wenn Sie dies tun, wird er zwar letztendlich die geforderten Leistungen erreichen, diese aber nicht unbedingt verinnerlichen. Er wird somit zwar einen Test bestehen können, seine Fähigkeiten aber im entscheidenden Moment nicht anwenden können.

Beobachten Sie bei den Aufgaben dieses Kapitels, ob der Schüler Folgendes zeigt:

- Sein Verständnis

1^e Indem er spontan Elemente zählt, um Mengen zu bewerten oder zu vergleichen. Wenn er wissen möchte, wie viele Objekte sich in einer Menge befinden, zählt er diese Objekte dann? Wenn er wissen möchte, in welcher Menge sich mehr Objekte befinden, zählt er dann die Elemente jeder Menge? Wenn diese beiden Verhaltensweisen spontan auftreten – selbst wenn er sich beim Zählen irrt oder beispielsweise zu dem Schluss kommt, dass die Menge mit acht Einheiten mehr enthält als die mit neun –, gehen Sie davon aus, dass der Schüler das gesuchte Verständnis zeigt.

2^e Er berücksichtigt, dass sich die Anzahl der Elemente nicht ändert, wenn sie ihre Position wechseln. Wenn also eine Reihe von Spielsteinen auseinandergezogen wird, geht er nicht davon aus, dass nun mehr Spielsteine vorhanden sind, ohne dass er das Bedürfnis verspürt, sie zu zählen. Wenn der Schüler die Elemente zählt, bevor er feststellt, dass sich ihre Anzahl nicht geändert hat, beherrscht er diese Kompetenz tatsächlich nicht.

- Seine Argumentation

Er begründet, warum das Ausdehnen einer Reihe von Spielsteinen oder die bloße Änderung der Position der Objekte in einer Menge deren Anzahl nicht verändert. So erklärt er, dass eine Reihe von Spielsteinen ausgedehnt werden kann, ohne die Anzahl der Spielsteine zu erhöhen, wenn man den Abstand zwischen diesen Spielsteinen vergrößert.

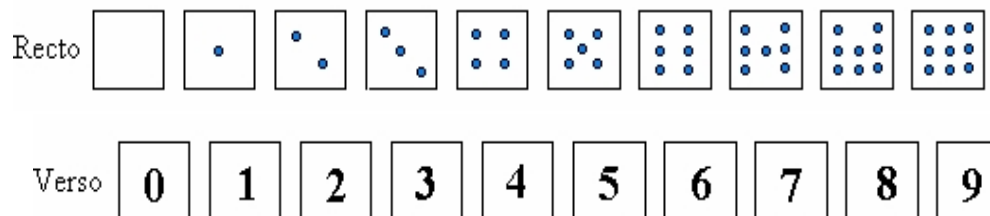
- Seine Leistungsfähigkeit

Durch das korrekte Zählen von Mengen mit mindestens zehn Elementen. Der Schüler kennt mindestens die Zahlenreihe von 1 bis 10 und zählt, wenn er diese zum Zählen verwendet, jedes Element genau einmal.

Im Rahmen der Aktivitäten dieses Kapitels lernt der Schüler, die Mengen, die er vergleicht, symbolisch darzustellen. Seien Sie nachsichtig, wenn er Zahlen verwechselt oder einige davon falsch schreibt. Dies wird sich schnell von selbst korrigieren.

Material:

- 4 Stäbchen gleicher Länge (z. B. Kaffeestäbchen);
- drei Pappquadrate von etwa $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$;
- 20 Spielsteine;
- zwei Sätze mit je 10 Kartonstücken mit einer Seitenlänge von ca. $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ wie folgt:



- sieben Kartonquadrate mit einer Seitenlänge von $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$, auf die Sie Folgendes schreiben:



Aufgabe 1

Legen Sie zwei Quadrate mit den Maßen $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ auf den Tisch und lassen Sie dabei etwa 15 bis 20 cm Abstand zwischen den beiden.

- a) Bitten Sie den Schüler, fünf Spielsteine auf das rechte Quadrat und drei Spielsteine auf das linke Quadrat zu legen. Fragen Sie ihn, wo mehr Spielsteine liegen. Fragen Sie ihn, woran er das erkennt.

Bitten Sie ihn, zwei Stäbchen zu nehmen und sie zwischen die beiden Pappquadrate zu legen, um anzuzeigen, wo mehr Spielsteine liegen und wo weniger. Sagen Sie ihm dazu, dass er einfach mehr Abstand zwischen den Enden der Stäbchen auf der Seite des Quadrats lassen soll, auf der mehr Spielsteine liegen, und weniger Abstand – oder gar keinen – auf der Seite, auf der weniger Spielsteine liegen.

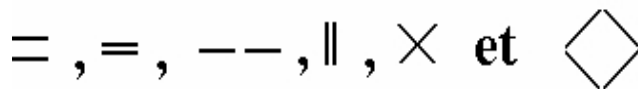
Die erwartete Lösung lautet also:



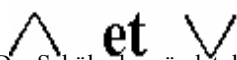
Vergewissern Sie sich, dass er das Vorstehende gut verstanden hat, bevor Sie ihm auf die gleiche Weise die folgenden Aufgaben vorschlagen.

- b) vier Spielsteine links und zwei rechts;
- c) sechs links und drei rechts;
- d) acht auf der rechten Seite und zwei auf der linken Seite;
- e) keine links und sieben rechts;
- f) fünf rechts und fünf links;

Hinweis: Lassen Sie den Schüler ein wenig experimentieren. Diese Aufgabe ist die wichtigste dieser Reihe, da sie es dem Schüler ermöglicht, sein Verständnis unter Beweis zu stellen. Tatsächlich muss er lediglich die Stäbchen so anordnen, dass die Lücken links und rechts gleich groß sind. Hier sind einige gültige Lösungen, die von Schülern gefunden wurden:



Im letzten Fall verwendet der Schüler vier Stäbchen. Die folgenden Lösungen sind ebenfalls gültig:



Der Schüler begründet dies damit, dass hier weder „>“ noch „<“ zulässig sind.

Der Schüler, der eine der acht vorherigen Darstellungen gewählt hat, hat das Thema wirklich verstanden und muss nun nur noch die von den Mathematikern festgelegte Darstellung lernen.

Loben Sie ihn also für seine Lösung und zeigen Sie ihm einige der anderen oben vorgestellten Möglichkeiten. Fragen Sie ihn bei jeder einzelnen, was er davon hält.

Sagen Sie ihm schließlich, dass sich die Mathematiker zwischen all diesen Möglichkeiten entscheiden mussten und dass sie sich für die folgende entschieden haben: =.

Fügen Sie hinzu, dass seitdem alle, die gut in Mathematik sind, diese Methode anwenden. Sie werden sehen, dass es von nun an einen guten Mathematiker mehr auf der Welt gibt.

- g) sechs rechts und acht links;
- h) vier rechts, drei links und noch eines links; Aufgabe 2

Diesmal muss nicht mehr das Vergleichszeichen gefunden werden, sondern eine bestimmte Anzahl von Spielsteinen, die auf das noch leere Quadrat gelegt werden. Oft gibt es mehrere Lösungen. Fragen Sie den Schüler bei jeder Aufgabe, ob es mindestens eine weitere Lösung gibt, und wenn ja, eine zweite zu finden.

- a) Weisen Sie den Schüler an, sechs Spielsteine auf das linke Quadrat zu legen und die Stäbchen wie folgt anzuordnen: $>$. Fragen Sie ihn, wie viele Spielsteine rechts platziert werden können.

Hinweis: Nehmen Sie die beiden Sätze nummerierter Kärtchen heraus. Zeigen Sie ihm die Seite, auf der Spielsteine abgebildet sind, und bitten Sie den Schüler, diejenigen auszuwählen, die zu dem passen, was er gerade gemacht hat. Zwischen diesen beiden neuen Kärtchen muss er die beiden anderen Stäbchen richtig platzieren.

Fahren Sie so mit jeder Aufgabe dieser Reihe fort.

- b) drei rechts, Stäbchen = ;
- c) vier rechts, Stäbchen < ;
- d) null links, Stäbchen = ;
- e) Stäbchen $>$ (nur);
- f) Striche = (nur);
- g) Striche $<$ (nur);

Aufgabe 3

Diesmal legen Sie Spielsteine auf die Quadrate und zwischen diese die Stäbchen. Dabei werden Ihnen gelegentlich Fehler unterlaufen. Der Schüler muss daher jedes Mal Ihre Arbeit überprüfen und gegebenenfalls korrigieren.

Oft gibt es mehr als eine Möglichkeit, die Korrektur vorzunehmen. Bitten Sie ihn, einige davon zu finden. Lassen Sie ihm manchmal freie Hand, manchmal legen Sie Einschränkungen fest, wie zum Beispiel:

- nur die Stäbchen zu verändern;
- nur die Anzahl der Spielsteine auf einem bestimmten Feld ändern.

Bevor der Schüler Ihre Arbeit korrigiert, soll er, falls er einen Fehler findet, die beiden Sätze von Karten mit den Zahlen von null bis neun sowie zwei Stäbchen verwenden, um Ihre Vorgehensweise nachzumachen. Legen Sie die Karten so aus, dass die Zahlen nach unten zeigen. Erläutern Sie diese Vorgehensweise, um sich daran zu erinnern, was Sie zu Beginn gemacht haben.

a)  $>$ 

b)  $=$ 

c)  $>$ 

d)  $<$ 

e)  $<$ 

f)  $>$ 

g)  $<$ 

h)  $>$ 

Aufgabe 4

Diesmal verwendest du die drei Pappquadrate, die vier Stäbchen, die Spielsteine und die Sätze mit den nummerierten Pappkarten.

Die Aufgabe ähnelt der ersten Aufgabe dieses Kapitels, wird jedoch mit drei statt mit zwei zu vergleichenden Mengen durchgeführt.

Ordnen Sie daher die drei Quadrate in einer Reihe an und lassen Sie dabei genügend Platz zwischen ihnen, um die Stäbchen dazwischen zu legen. Weisen Sie den Schüler an, die Spielsteine auf die Kartons zu legen und anschließend die Stäbchen darauf.

Die folgende Tabelle enthält die Aufgaben, die Sie dem Schüler stellen können.

Wenn eine Aufgabe erfolgreich gelöst wurde, bitten Sie den Schüler, auf jede Gruppe von Spielsteinen die Karte zu legen, die die Anzahl der versteckten Spielsteine angibt. Diesmal sind die Zahlen also sichtbar.

Wenn der Schüler die Zahlen platziert hat, bitten Sie ihn, vorzulesen, was dabei herauskommt. So wird er beispielsweise bei (b) vorlesen: „Drei ist mehr als Null und Null ist weniger als Sechs“ oder „Drei ist größer als Null und Null ist kleiner als Sechs“.

Anmerkungen: 1. Bitten Sie ihn, Ihnen seine Vorgehensweise auf diese beiden Arten zu beschreiben. Nehmen Sie sich die nötige Zeit, um sie ihm zu zeigen. Etwa ab Aufgabe (f) sollte er dann in der Lage sein, ohne Hilfe zurechtzukommen.

2. Manche Kinder glauben, dass der Ausdruck „drei ist kleiner als fünf“ bedeutet, dass die Ziffer „3“ in kleinerer Schrift geschrieben werden muss als die Ziffer 5. Achten Sie daher darauf, dass der Schüler versteht, dass die Menge und nicht das Symbol kleiner ist.

	KARTON LINKS	KARTON IN DER MITTE	KARTE RECHTS
a)	3	4	6
b)	3	0	6
c)	5	3	5
d)	4	5	5
e)	3	2	0
f)	7	0	0
g)	8	2	9
h)	5	3	7
i)	0	0	0
j)	8	4	7
k)	7	7	2
l)	6	6	6

Aufgabe 5

Nehmen Sie die Kärtchen x, y, =, < und >.

Bilden Sie mit dem Material und den Karten mit den Zahlen Folgendes:

a)

2

=

x

<

y

Verstecken Sie unter dem Karton „x“ einen Karton, auf dem die Zahl 2 steht. Verstecken Sie unter dem Karton „y“ eine 5.

Bitten Sie den Schüler, zwei Spielsteine auf ein erstes großes Quadrat zu legen, dann die Stäbchen wie abgebildet (=) zu platzieren, anschließend das zweite Quadrat zu platzieren und es vorerst leer zu lassen, dann die beiden anderen Stäbchen wie abgebildet und ein weiteres leeres Quadrat.

Sagen Sie ihm, dass sich unter dem „x“ eine Zahl verbirgt. Bitten Sie ihn, diese Zahl unter Beachtung der gegebenen mathematischen Hinweise zu finden.

Wenn er sie gefunden hat, nehmen Sie das Quadrat mit dem „x“ weg, sodass er die 2 sieht. Bitten Sie ihn nun, die unter dem „y“ versteckte Zahl zu erraten.

Diesmal gibt es mehrere Lösungen. Vergewissern Sie sich, dass ihm das bewusst ist, und bitten Sie ihn dann, einige Lösungen zu nennen, bevor Sie die 5 zeigen. Fragen Sie ihn, ob diese Lösung richtig ist und warum.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben genauso vor. Machen Sie ein- oder zweimal einen Fehler, zum Beispiel bei (f): $3 = 2 = 2$ und bei (h): $5 < 1 = 1$. Der Schüler wird überrascht sein. Er soll es erklären und korrigieren!

b) $\square < \boxed{5} > \square$

h) $\square < \square = \boxed{1}$

c) $\square < \square < \boxed{4}$

i) $\square > \square > \boxed{5}$

d) $\boxed{8} > \square = \square$

j) $\square > \square < \square$

e) $\boxed{7} > \square < \boxed{3}$

k) $\square < \square < \square$

f) $\square = \square = \boxed{2}$

l) $\square < \square = \square$

g) $\square > \boxed{3} > \square$

Anmerkung: Die vorangegangenen Aufgaben haben viele Lösungen. Bei Aufgabe (i) ist es nicht offensichtlich, dass man zuerst die in der Mitte versteckte Zahl finden muss. Wenn der Schüler links beginnt und sich auf ein Ratespiel einlässt, bitten Sie ihn, mit der Karte in der Mitte zu beginnen und seine Wahl zu begründen. Wenn er die versteckte Zahl gefunden hat, zeigen Sie diese Zahl und bitten Sie ihn, die andere Zahl zu finden.

Bei den Aufgaben (j) bis (l) kann er an einer beliebigen Stelle beginnen. Sobald er eine erste Ziffer richtig identifiziert hat, zeigen Sie diese Ziffer und vergewissern Sie sich, dass die Schlussfolgerungen, die er anschließend zieht, logisch sind.

Aufgabe 6

Diesmal muss der Schüler das gesamte in diesem Kapitel erworbene Verständnis unter Beweis stellen.

Legen Sie die Kärtchen wie in den folgenden Aufgaben angegeben aus. Verstecken Sie unter jedem Quadrat eine Ziffer und achten Sie darauf, dass diese den Angaben der Aufgabe entspricht. Bringen Sie außerdem die Quadrate x, y und z auf den Kärtchen an; dies erleichtert die Bezeichnung der Kärtchen und führt in das Konzept der Variablen ein. So kann der Schüler beispielsweise bei Aufgabe a darüber diskutieren, dass die unter x versteckte Zahl die kleinste ist, ... Fragen Sie den Schüler vor jeder Aufgabe, wo sich die kleinste Zahl verbirgt und anschließend, wo sich die größte verbirgt. Bitten Sie ihn, seine Entscheidungen zu begründen.

a) $\square < \square < \square$

b) $\square = \square > \square$

c) $\square > \square < \square$

d) $\square < \square > \square$

e) $\square < \square = \square$

f) $\square = \square = \square$

g) $\square > \square > \square$

h) $\square > \square \quad \square$

i) $\square < \square < \square < \square$

j) $\square > \square > \square < \square$

k) $\square = \square < \square = \square$

Bitten Sie den Schüler nun, die Arbeitsblätter 1 bis 3 in seinem persönlichen Mathematikheft auszufüllen. Diese Seiten bilden Anhang II dieses Dokuments. Legen Sie sie in einen Schulranzen. Sagen Sie dem Schüler, dass er alle seine Entdeckungen in sein Heft eintragen soll und dass er später erfreut feststellen wird, was er in seinem Alter bereits alles konnte.

Seien Sie nachsichtig, was die Schreibweise der Zahlen angeht, und ermutigen Sie den Schüler gleichzeitig, sich zu korrigieren und zu verbessern. Wenn er bestimmte Zahlen nicht richtig schreibt, zeigen Sie ihm die Vorlagen, damit er sich korrigieren kann. Verbergen Sie diese Vorlagen niemals, sondern lassen Sie ihn sie nach und nach einsehen. Fordern Sie den Schüler nicht auf, mehr als eine Seite pro Tag zu bearbeiten. Führen Sie bei Bedarf weitere ähnliche Übungen durch. „Bei Bedarf“ bedeutet, wenn anhaltende Schwierigkeiten bestehen.

ANNEXE II