

Kapitel 10

Elementare symbolische Darstellungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden zahlreiche Symbole und Begriffe eingeführt, ohne dass wir diese ausführlich wiederholt oder schriftliche Übungen dazu gemacht hätten. Das Erlernen der Mathematik umfasst immer zwei Aspekte: Der erste ist die Entdeckung von Invarianzen (oder Eigenschaften), und der zweite ist deren Ausdruck mittels mündlicher und schriftlicher Symbole.

Wenn der Schüler versteht, dass er durch das Ausdehnen einer Reihe von Spielsteinen nicht mehr davon erhält, wenn er begreift, dass ein Quadrat seine Eigenschaften beibehält, selbst wenn er es dreht, oder wenn er erkennt, dass die Zahl 9 in Form eines Quadrats dargestellt werden kann, entdeckt er Invarianzen. Diese Art des mathematischen Lernens ist die grundlegendste und entspricht dem Entwicklungsstand des Menschen. Wenn in diesem Bereich anhaltende Schwierigkeiten bestehen, ist deren Lösung nicht immer pädagogischer Natur. Tatsächlich können bestimmte Hirnschädigungen die neurologische Entwicklung beeinträchtigen und einen Menschen daran hindern, mathematische Invarianten zu entdecken. Glücklicherweise leiden nur sehr wenige Menschen unter solchen Problemen.

Es ist der zweite Aspekt, das Erlernen von Symbolen und des mathematischen Vokabulars, der die meisten Probleme verursacht. Glücklicherweise lassen sich diese Schwierigkeiten leicht beheben oder sogar vermeiden. Im Gegensatz zur Entdeckung von Invarianzen, bei der es eine recht starre Abfolge gibt, kann beim Erlernen der Symbole die Reihenfolge ihrer Einführung stark variieren. Sie haben übrigens bereits festgestellt, dass das Symbol für die Quadratwurzel bei Sechsjährigen keine wirklichen Schwierigkeiten bereitet.

Was die Invarianten betrifft, erweist sich eine Wiederholung als unnötig. Dafür scheint es zwei Gründe zu geben. Erstens führt die Entdeckung einer Invariante bei den Schülern zu einer Veränderung ihrer Denk- und Arbeitsweise; zweitens bauen sich Invarianten oft aufeinander auf, wobei eine neue Invariante die alte umfasst und die Entdeckung weiter vorantreibt. Denken Sie daran, dass Sie im Alter von etwa fünf oder sechs Jahren entdeckt haben, dass sich in einer fest verschlossenen Flasche die gleiche Menge Flüssigkeit befindet, egal ob sie aufrecht steht oder auf der Seite liegt. Wann hatten Sie das Bedürfnis, diese Entdeckung zu wiederholen? Tatsächlich haben Sie nicht diese Entdeckung vergessen, sondern Ihre Denkweise vor dieser Entdeckung.

Andererseits können – im Gegensatz zu den Invarianten – Terminologie und Symbolik, wozu auch Rechentechniken und alle schriftlichen oder praktischen Verfahren gehören, in Vergessenheit geraten. Erinnern Sie sich noch daran, wie man einen Winkel misst, wie man die Quadratwurzel einer großen Zahl berechnet oder was $\log 2,3589$ bedeutet?

Das sind Kenntnisse, die man vergisst. Die meisten davon werden für jeden von uns ohnehin kaum von Nutzen sein. Anders verhält es sich jedoch mit den Invarianten, die unser Denken und unser Verständnis unserer Umwelt prägen.

Daher zielt das vorliegende Kapitel darauf ab, die grundlegenden Symbole der Arithmetik zu wiederholen. Es ist völlig normal, dass diese noch nicht vollständig verinnerlicht sind. Manche Schüler vertauschen beispielsweise noch einige Ziffern oder haben die Bedeutung des Divisionszeichens vergessen.

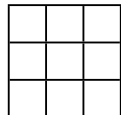
In diesem Kapitel haben Sie daher die Gelegenheit, diese symbolischen Lerninhalte wieder aufzufrischen. Wann immer Unsicherheit oder Schwierigkeiten auftreten, erinnern Sie an die entsprechenden Übungen aus den vorangegangenen Kapiteln. Erlauben Sie jederzeit den Einsatz von Lernmaterialien. Vergessen Sie nicht, dass es das Material ist, das zur Entdeckung von Invarianten führt, und nicht die Symbole. Darüber hinaus ermöglicht das Material den Aufbau von mentalen Referenzbildern, die die mächtigsten Werkzeuge in der Mathematik darstellen.

Die Aufgaben in diesem Kapitel sind daher als Spiele gestaltet, die „Logix“ oder „Mystéro“ ähneln. Jedes Mal muss der Schüler die Zahlen von 1 bis 9 unter Berücksichtigung aller Hinweise der Aufgabe in einem Raster anordnen. Anhand dieser Arbeitsblätter können Sie leicht erkennen, welche vorherigen Kapitel ihnen entsprechen. Sollte der Schüler Schwierigkeiten haben, können Sie daher problemlos zum entsprechenden Kapitel zurückkehren. Lassen Sie in diesem Fall die Aufgaben des vorliegenden Kapitels für zwei Mathematikstunden beiseite und nutzen Sie diese beiden Stunden, um ähnliche Aufgaben wie die des zu wiederholenden Kapitels zu wiederholen. Achten Sie bei diesen Aufgaben zunächst darauf, dass der Schüler die Invarianten, die vor dem Auftreten der Symbole behandelt werden, gut versteht. Erinnern Sie ihn anschließend schrittweise an die Symbole, die diese Invarianten darstellen. Seien Sie aufmerksam, denn wahrscheinlich liegt das Problem gerade in dieser zweiten Phase.

Profil

Wirksamkeit: Die Aufgaben dieses Kapitels dienen vor allem der Wiederholung der Symbolisierung und der Terminologie. Stellen Sie daher sicher, dass der Schüler die verschiedenen bisher behandelten Symbole gut beherrscht. Notieren Sie sich diejenigen, die Probleme bereiten, und nehmen Sie sich regelmäßig ein paar Minuten Zeit, um sie mit dem Schüler zu wiederholen. Sie können Plakate anfertigen, die daran erinnern, indem Sie die Symbole zusammen mit Zeichnungen notieren, die deren Bedeutung veranschaulichen.

Material

- Ein Raster mit 9 Feldern. Jedes Feld ist etwa 5 oder 6 Zentimeter im Quadrat groß.
- 
- Ein Satz von 9 Quadraten aus festem Karton, auf die Sie sowohl auf der Vorder- als auch auf der Rückseite die Zahlen von 1 bis 9 aufzeichnen, wobei Sie auf der Vorder- und Rückseite desselben Kartonquadrats jeweils nur eine einzige, identische Zahl eintragen. Lassen Sie einen Abstand zwischen der linken Kante des Kartons und der darauf befindlichen Zahl, da Sie gegen Ende dieses Kapitels dort einen Strich eintragen müssen, um eine negative Zahl (-4) anzuzeigen. Die Seiten jedes Quadrats sind einen Zentimeter kürzer als die Felder des Rasters.
 - Spielsteine, Würfel oder Stäbchen, die der Schüler bei Bedarf zum Lösen der Aufgaben verwenden kann.

Aufgabe 1

Bei den ersten Aufgaben müssen Figuren gezählt werden, die auf unterschiedliche Weise angeordnet sind. Beobachten Sie, wie der Schüler vorgeht. Wenn er nicht alle Figuren zählt oder eine Figur mehr als einmal zählt, besteht die Gefahr, dass er seine neun Kärtchen nicht alle platzieren kann.

Seien Sie jedoch aufmerksam, denn manche Schüler schauen auf die Zahlen, die noch nicht platziert sind, und sorgen dafür, dass ihre Zählung bei einer dieser Zahlen endet. Verstecken Sie in diesem Fall die Zahlen, die noch nicht platziert wurden. Zwar können sie immer noch die Zahlen berücksichtigen, die bereits auf dem Raster liegen, aber das dauert länger und sollte sie dazu anregen, genauer zu zählen.

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 2

Diesmal muss der Schüler Zahlenfolgen erkennen und die Zahl identifizieren, die sich hinter dem Buchstaben verbirgt. Beachten Sie, dass sich der Buchstabe von Feld zu Feld ändert, da jeder Buchstabe in dieser Übung nur einen einzigen möglichen Wert hat. Wenn kein Buchstabe, sondern gepunktete Linien vorhanden sind, weisen Sie den Schüler darauf hin, dass dies dasselbe bedeutet: Die gepunkteten Linien zeigen an, dass eine Ziffer fehlt.

a)

1, 2, 3, a	9, 8, 7, b	3, 4, c
3, 2, d	9, 8, e	0, 1, f
6, 7, g	0, 1, 2, h	6, 7, 8, i

b)

6, 5, 4, ...	4, 5, 6, ...	6, 5, ...
2, 3, 4, ...	6, 7, ...	5, 4, 3, ...
3, 2, ...	6, 7, 8, ...	4, 5, ...

c)

7, 6, a, 4	5, 6, b, 8	4, c, 2
7, d, 5	e, 2, 3	f, 8, 7
2, 3, g, 5	7, h, 9	1, i, 3, 4

d)

..., 4, 5	3, 2, ...	7, 8, ...
3, ..., 5	7, ..., 5	3, ..., 1
9, ..., 7	4, ..., 6	..., 8, 9

Hinweis: Die letzten beiden Aufgaben (e und f) sind zugegebenermaßen schwieriger. Falls der Schüler sie nicht lösen kann, schreiben Sie eine Zahlenfolge wie folgt auf:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zunächst legt der Schüler die Spielsteine auf die markierten Zahlen, zum Beispiel auf die 2, die 4 und die 8 (Aufgabe (e), erstes Feld: 2, 4, a, 8). Bitten Sie ihn anschließend, einen weiteren Spielstein auf eine der Zahlen zwischen der 4 und der 8 zu legen, ohne anzugeben, auf welche Zahl genau. Bitten Sie ihn anschließend, seine Reihe zu betrachten. Erklären Sie ihm, dass die Spielsteine die Spuren darstellen, die eine Person hinterlässt, wenn sie auf einem Weg geht. Waren seine Schritte gleich lang? Wo muss der vierte Spielstein platziert werden, damit die Schritte gleich lang sind? Das ist die Zahl, die sich hinter dem Buchstaben „a“ verbirgt.

Wenn der Schüler noch Schwierigkeiten hat, legen Sie Kartonstücke mit Zahlen auf den Boden und lassen Sie ihn neben den Kartonstücken entlanggehen. Halten Sie einen Abstand von etwa 30 Zentimetern zwischen den Zahlen ein. So kann der Schüler den Unterschied zwischen dem Übergang von 1 zu 2 und dem von 1 zu 3 oder von 1 zu 4 mit einem einzigen Schritt besser „spüren“.

e)

2, 4, a, 8	0, 3, 6, b	1, c, 5, 7
9, 8, d, 6	7, 5, 3, e	2, f, 6, 8
8, 6, 4, g	9, 7, h, 3	6, 7, i, 9

f)

7, 5, 3, ...	2, 4, 6, ...	1, 3, ..., 7
9, ..., 5, 3	..., 4, 6, 8	3, 5, 7, ...
5, ..., 3, 2	8, ..., 4, 2	9, 7, 5, ...

Aufgabe 3

Dieses Mal werden wir die Zeichen wiederholen, die die Ordnungsbeziehung kennzeichnen.

a)

$a > 8$	$b = 2$	$7 < c < 9$
$d < 2$	$7 > e > 5$	$2 < f < 4$
$6 > g > 4$	$3 < h < 5$	$6 < i < 8$

b)

$3 > a > 1$	$4 < b < 6$	$c < 2$
$d = 6$	$9 > e > 7$	$2 < f < 4$
$g > 7$	$5 > h > 3$	$i > 3$

Hinweis: Jetzt wird es etwas schwieriger, aber der Schüler muss die Zahlen Zeile für Zeile von links nach rechts finden.

c)

$a = 3$	$6 < b < 8$	$1 < c < 4$
$d < 3$	$6 > e > 4$	$9 = f$
$4 < g < 8$	$h < 6$	$i > 1$

d)

$2 > a$	$7 < b < 9$	$c = 4$
$6 = d$	$e < 3$	$9 > f > 5$
$g > 5$	$h < 5$	$i = 5$

e)

$6 < a < 8$	$3 = b$	$2 < c < 5$
$d < 2$	$5 > e$	$f = 6$
$8 < g$	$h < 7$	$i > 3$

f)

$a = 8$	$2 > b$	$2 < c < 4$
$d > 7$	$6 = e$	$2 < f < 5$
$g < 4$	$h > 5$	$9 > i$

Hinweis: Von nun an sind die Felder nicht mehr geordnet. Der Schüler muss herausfinden, in welchem Feld er seine erste Zahl einordnen kann, dann die zweite ... Es gibt immer mindestens eine sichere Wahl.

g)

$2 < a < 6$	$6 > b$	$c = 5$
$5 > d > 1$	$e < 7$	$7 < f < 9$
$g > 7$	$3 = h$	$i < 9$

h)

$1 < a < 5$	$b > 2$	$5 > c$
$8 > d > 6$	$e = 2$	$f < 7$
$5 < g < 8$	$8 < h$	$4 = i$

i)

$2 > a$	$b > 1$	$c = 5$
$d > 4$	$3 < e$	$3 > f$
$g > 8$	$h > 6$	$6 < i < 8$

j)

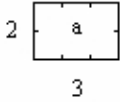
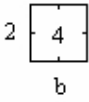
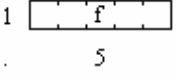
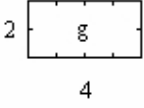
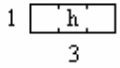
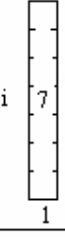
$6 > a > 2$	$b < 8$	$c < 6$
$d = 5$	$e > 3$	$6 < f < 9$
$2 = g$	$9 > h > 7$	$2 < i < 4$

Aufgabe 4

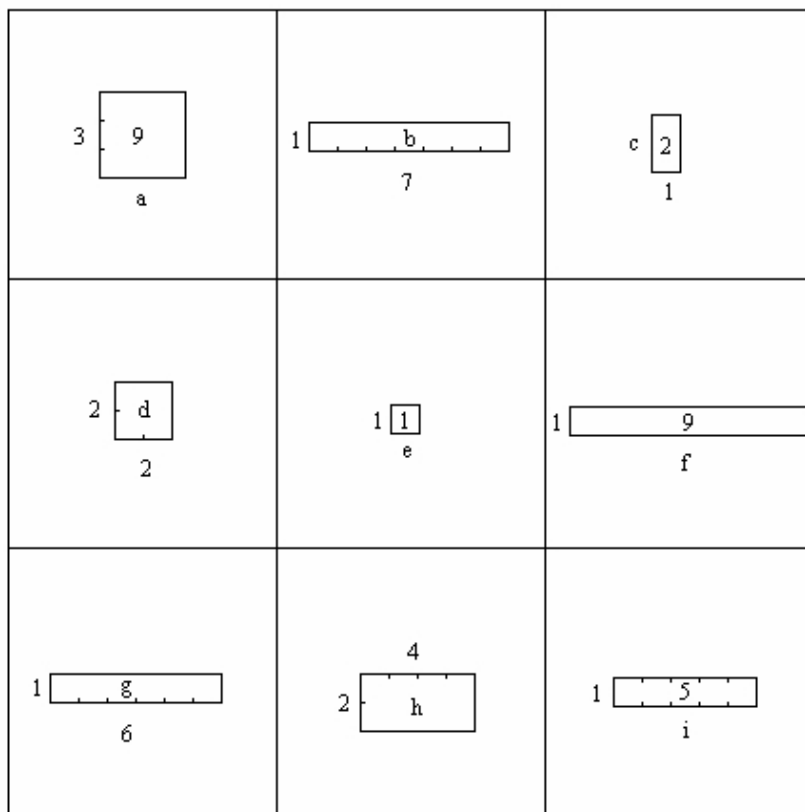
Hier wiederholen wir die Darstellung der Multiplikationsfunktion.

Hinweis: Weisen Sie den Schüler darauf hin, dass die Zahl im Inneren des Rechtecks die Anzahl der Würfel angibt, die zur Bildung des Rechtecks benötigt werden, und dass die Zahlen um das Rechteck herum die Länge seiner Seiten angeben. Schließlich geht es hier nicht darum, die Multiplikationstabellen auswendig zu lernen, sondern darum, das Rechteck mit der Symbolik in Verbindung zu bringen.

a)

b)



c)

3×3	1×5	2×1
2×2	3×2	1×3
1×1	4×2	7×1

d)

$8/1$	$1/1$	$9/1$
$6/2$	$6/1$	$8/4$
$7/1$	8. Februar	5.1

e)

$9 \div 3$	$4 \div 2$	$6 \div 1$
$9 \div 1$	$5 \div 1$	$8 \div 2$
$3 \div 3$	$8 \div 1$	$7 \div 1$

f)

$\sqrt{4}$	7×1	$\sqrt{1}$
2×4	$\sqrt{9}$	3×3
1×5	2×3	$8 \div 2$

g)

4×2	3×1	1×5
$6 \div 1$	$\sqrt{4}$	$5/5$
$8 \div 2$	1×9	$7/1$

h)

1×7	$\sqrt{1}$	2×2
$5 \div 1$	$\sqrt{4}$	1×9
$6 \div 2$	8×1	3×2

Aufgabe 5

Sie haben die Zahlen von 1 bis 9 auf Ihre Pappquadrate geschrieben. Nun fügen Sie auf jeder Seite jedes Quadrats das Symbol „-“ auf eine Seite jedes Pappquadrats. So steht auf der einen Seite zum Beispiel „-5“ und auf der anderen „5“. In den folgenden Tabellen wiederholen wir das Addieren und Subtrahieren. Weisen Sie den Schüler darauf hin, dass das Symbol „+“ nicht erforderlich ist, wenn es am Anfang steht. Erklären Sie ihm also, dass „+5“ dasselbe ist wie „5“. Außerdem ist „+5 - 4“ dasselbe wie „5 - 4“.

Auf diese Weise kann jede Karte verwendet werden, unabhängig davon, ob die gesuchte Zahl positiv oder negativ ist – sie muss lediglich auf der einen oder anderen Seite des Rasters platziert werden.

a)

$+9 - 1$	$+1 + 2$	$-7 + 2$
$-3 + 1$	$+6 - 2$	$-4 - 5$
$-7 + 8$	$+2 + 5$	$7 - 1$

b)

$8 - 1$	$3 + 6$	$-2 + 1$
$+3 + 1$	$-6 - 2$	$-9 + 4$
$+6 - 4$	$-3 - 3$	$-4 + 1$

c)

$9 - 7$	$+6 - 5$	$-8 + 3$
$-4 - 3$	$-9 + 6$	$-9 + 0$
$7 - 3$	$+5 + 3$	$+2 + 4$

d)

$+6 - 5$	$0 - 8$	$+4 - 1$
$-9 + 4$	$-1 - 1$	$+4 + 3$
$-4 + 8$	$8 - 2$	$1 + 8$

e)

$-7 + 5$	$2 + 7$	$-6 + 3$
$1 - 5$	$0 - 1$	$1 - 9$
$-1 + 7$	$3 + 2$	$9 - 2$

f)

$2 + 1$	$0 - 6$	$4 + 1$
$-3 - 1$	$3 + 3 + 3$	$1 + 1$
$-4 - 4$	$3 + 4$	$+1 - 0$

g)

$6 - 1$	$+3 + 5$	$-2 - 4$
$-2 + 4$	$-8 - 1$	$+4 - 3$
$-9 + 5$	$-2 - 5$	$1 + 2$

h)

$-7 + 1$	$5 - 3$	$+8 - 1$
$-6 + 7$	$2 - 7$	$-9 + 6$
$-2 - 7$	$8 - 4$	$7 + 1$